manuscripta math. 86, 81 - 102 (1995)

manuscripta mathematica

STRATIFICATIONS DISTINGUÉES COMME OUTIL EN GÉOMÉTRIE SEMI-ANALYTIQUE

K. KURDYKA[1], S. ŁOJASIEWICZ[2], M. A. ZURRO[3]

Reçu le 14 juillet 1994

We introduce the distinguish stratifications as a new tool in order to give new proofs of some essential facts in the semi-analytic geometry in an easier way, for example the property of regular separation.

INTRODUCTION

La notion d'une stratification normale est un outil de base dans la géométrie semi-analytique . Elle sert à surmonter les difficultés essentielles dans le développement de cette géométrie.

La construction d'une stratification normal à base d'un système normal des polynômes distingués, ainsi que la preuve de l'existence d'une telle stratification qui soit compatible avec une famille localement finie des semi-analytiques se montrent assez compliquées. En particulier la démonstration du théorème d'existence exige l'emploi aussi composé que délicat des certaines opérations qui résultent du théorème des fonctions symmétriques.

Or, dans cet article on propose un type des stratifications, nomées distinguées, lequel sert également et qui a l'avantage d'être beaucoup plus simple en ce qui concerne les faits en question.

Comme un exemple d'application on montre que l'opération de l'image des compacts par les projections sur $\mathbb{R}^2$ respecte la semi-analycité, ce qui sert pour établir une version de la séparation régulière.

Dans plusieurs points essentiels de nôtre travail nous nous sommes inspirés par les idées de Michel Coste dans sa belle présentation de la géométrie semi-algébrique ([2], [1]).

[1]Partially supported by KBN grant PB 1219/2/91. Adress: Université de Savoie. Laboratoire de Mathématiques. 73 376 Le Bourget-du-Lac, cedex. France.
[2]Partially supported by KBN grant PB 1219/2/91. Adress: Uniwersytet Jagielloński. Institut Matematyki. Ul. Reymonta 4. 30 059 Kraków. Poland.
[3]Partially supported by DGICYT. Adress: Dpto. Álgebra, Geometría y Topología. Facultad de Ciencias. Universidad de Valladolid. 47 005 Valladolid. Spain.

Rappels sur les ensembles semi-analytiques

Soit M une variété analytique réelle de dimension n.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions réelles dans un sous-ensemble U de M. On dit qu'un sous-ensemble A de M *est décrit* dans U par les fonctions de $\mathcal{F}$ si

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{s} \cap_{j=1}^{r} A_{ij}$$

où chaque A_{ij} est de la forme $\{f_{ij} > 0\}$ ou bien $\{f_{ij} < 0\}$ ou bien $\{f_{ij} = 0\}$ avec $f_{ij} \in \mathcal{F}$.

On dit qu'un sous-ensemble E de M est *semi-analytique* (de M) si pou chaque point x de M, il existe un voisinage ouvert U de x tel que E soit décrit dans U par les fonctions analytiques dans ce voisinage.

Une conséquence immédiate de la définition est le fait que la classe des ensembles semi-analytiques dans M est fermée par rapport aux operations du complémentaire, de la réunion localement finie ainsi que par celle de l'intersection finie. Observons que chaque semi-analytique est un F_σ-ensemble

On appelle *feuille semi-analytique* de M chaque sous-varieté analytique de M qui est aussi un sous-ensemble semi-analytique de M.

La *dimension* d'un ensemble semi-analytique E de M est définie par

$$\dim E = \max \{\dim \Gamma : \Gamma \text{ sous-varieté analytique }, \Gamma \subset E\}.$$

Alors, $\dim E = n \iff \operatorname{int}_M E \neq \emptyset$ (par définition). Ensuite, $\dim \bigcup_{i=1}^{k} E_i = \max_i \dim E_i$ (par le théorème de Baire).

Supposons maintenant que $M = \mathbb{R}^n$.

Soit λ une droite (passant par 0). On dit qu'une fonction f analytique au voisinage de 0 est *λ-régulière* si le germe en 0 de la restriction f_λ n'est pas nul. Dans le cas où λ est l'axe des x_k on dira que f est *x_k-régulière*. Si h est la forme initial de f, alors la condition $h_\lambda \not\equiv 0$ implique que f est λ-régulière. Par conséquent l'ensemble des λ tels que f est λ-régulière est un ouvert dense de $\mathbb{P}^{n-1}$. Soit P un polynôme unitaire en variable x_n à coefficients analytiques dans un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. On défini l'ordre de P dans $x \in \mathbb{R}^n$ comme

$$\operatorname{ord}_x P = \min \left\{ i : \frac{\partial^i P}{\partial x_n^i}(x) \neq 0 \right\}$$

Rappelons **le théorème de préparation de Weierstrass:**

Soit f une fonction analytique au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Si f est x_n-régulière, alors on a

$$f = uP$$

dans un voisinage de 0, avec u analytique vérifiant $u(0) \neq 0$ et P polynôme distingué.

Par conséquent:

Si E est un semi-analytique dans un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$ décrit par des fonctions analytiques x_n-régulières, alors il est décrit aussi par les polynômes distingués correspondants dans un voisinage de 0.

Rappelons encore quelques notations.

Si $E \subset M$ et $a \in M$, on notera E_a le germe de E en a. Si $F \subset M \times N$, alors on pose

$$F_E = F \cap (E \times N)$$

et on note avec $F|_a$ la fibre $\{y \in N : (a, y) \in F\}$.

1. STRATIFICATIONS DISTINGUÉES

Rappelons qu'une *stratification semi-analytique* $\mathcal{T}$ d'un ouvert G de $\mathbb{R}^n$ est une partition localement finie de G en feuilles semi-analytiques connexes vérifiant la *condition du bord*:

(a) Pour chaque $\Gamma \in \mathcal{T}$ le bord (dans G), $\partial\Gamma \cap G$, est une réunion finie des feuilles de $\mathcal{T}$ de dimension strictement inférieure à celle de Γ.

On dit que cette stratification $\mathcal{T}$ est *compatible* avec des sous-ensembles $E_1, \dots, E_q$ de $\mathbb{R}^n$, si pour chaque E_i on a

$$\Gamma \subset E_i \quad \text{ou bien} \quad \Gamma \subset G \setminus E_i \quad \text{pour tout } \Gamma \in \mathcal{T} .$$

Alors, chaque $E_i \cap G$ est une réunion des feuilles de $\mathcal{T}$.

On définit *stratification distinguée* $\mathcal{C}$ d'un pavé $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\}$ par récurrence sur n.

Si $n = 1$ une stratification distinguée d'un intervalle $(-\delta, \delta)$ n'est que $\{(-\delta, \delta)\}$ ou bien $\{(-\delta, 0), \{0\}, (0, \delta)\}$.

Supposons que l'on a déjà défini les stratifications distinguées pour $n - 1$. Alors une stratification distinguée d'un pavé $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ est une stratification semi-analytique finie de Q qui vérifie les conditions suivantes:

(b) Il existe une stratification distinguée $\mathcal{C}'$ du pavé $Q' = \{|x_i| < \delta_i, 1 \leqslant i \leqslant n - 1\}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ telle que chaque feuille Γ de dimension au plus $n - 1$ de $\mathcal{C}$ est le graphe d'une application analytique $\Gamma : \Gamma' \to \mathbb{R}$ avec une $\Gamma' \in \mathcal{C}'$.

(c) Il existe un polynôme distingué P à coefficients analytiques dans un voisinage de $\overline{Q'}$ qui est nul sur l'ensemble $V = \bigcup\{\Gamma \in \mathcal{C} : \dim\Gamma \leqslant n - 1\}$ et tel que l'ordre $\Gamma \ni x \longmapsto \operatorname{ord}_x P$ est constant sur chaque $\Gamma \in \mathcal{C}$.

Observons que la condition (c) implique que $V = \{x \in Q : P(x) = 0\}$ vu que l'on a forcément $\operatorname{ord}_x P = 0$ sur chaque feuille Γ de dimension n. Un tel polynôme P sera appelé *polynôme associé à* $\mathcal{C}$. Pour chaque $\Gamma \in \mathcal{C}$ posons

$$P^\Gamma = \frac{\partial^{r-1} P}{\partial x_n^{r-1}} \quad \text{où } r = \operatorname{ord}_x P^\Gamma \text{ pour } x \in \Gamma .$$

Remarque 1. La condition au bord (a) implique évidement que l'ensemble $V = \bigcup\{\Gamma \in \mathcal{C} : \dim\Gamma \leqslant n - 1\}$ est fermé dans Q.

Les conditions (b) et (c) impliquent :
Remarque 2. On a

$$(\star) \qquad 0 \in \overline{\Gamma} \text{ pour chaque } \Gamma \in \mathcal{C}\,.$$

La condition (b) implique :

Lemme 1. *Chaque feuille semi-analytique d'une partition distinguée de dimension k est le graphe d'une application analytique d'un ouvert semi-analytique de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$.*

Soit $\mathcal{C}$ une partition de Q dans un nombre fini de feuilles semi-analytiques connexes.

Proposition. *Supposons que la condition (b) et la condition $(\star)$ de la remarque 2 soient vraies. Alors, la condition (a) équivaut à ce que l'ensemble V soit fermé dans Q. Donc, la condition du bord (a) est redondante dans la définition de stratification distinguée.*

Pour le démontrer nous utiliserons le suivant

Lemme 2. *Soient Ω un ouvert et Γ une sous-variété (de classe C^1) de $\mathbb{R}^n$, disjoints. Soit $a \in \Gamma \cap \partial\Omega$. Alors,*

$$(\partial\Omega)_a \subset \Gamma_a \Longrightarrow \Gamma_a \subset (\partial\Omega)_a\ .$$

En effet, on peut admettre que Γ est un sous-espace affin de $\mathbb{R}^n$. On a $\partial\Omega \cap U \subset \Gamma$ pour un voisinage ouvert convexe U de a. Si la thèse était fausse, il existerait un point $x \in \Gamma \cap U \setminus \overline{\Omega}$; et aussi un $y \in \Omega \cap U$. Donc, il y aurait un point $z \in \partial\Omega$ du segment ouvert $(x, y) \subset U$. Évidement $z \notin \Gamma$, mais $z \in \partial\Omega \cap U \subset \Gamma$, ce qui est absurde.

Preuve de la proposition. Sûrement $Q \backslash V$ est l'union des feuilles de dimension n de $\mathcal{C}$. On a

$$(1) \qquad \Gamma \in \mathcal{C} \Longrightarrow \partial\Gamma \subset \bigcup\{\Gamma' \in \mathcal{C} : \dim\Gamma' < \dim\Gamma\}$$

On le vérifie par récurrence sur n. Nous pouvons admettre que $\dim\Gamma < n$. On a $\Gamma : \Gamma' \to \mathbb{R}$ avec $\Gamma' \in \mathcal{C}$.

Si $(u, t) \in \partial\Gamma$, alors $u \in \partial\Gamma'$ et u est dans une feuille $\Lambda' \in \mathcal{C}'$ de dimension $< k = \dim\Gamma$. Alors (u, t) appartient à une feuille de $\mathcal{C}$ de dimension de Λ' (donc de dimension $< k$), parce que sinon, (u, t) serait dans une feuille de $\mathcal{C}$ de dimension n, donc $(u, t) \notin V$, mais $\partial\Gamma \subset V$, parce que V est fermé, et $(u, t) \notin \partial\Gamma$. Par conséquent

$$(2) \qquad \Gamma \in \mathcal{C} \Longrightarrow \partial\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset \text{ pour toute } \Gamma' \in \mathcal{C} \text{ de dimension } \geqslant \dim\Gamma.$$

Car sinon, il existerait un $\Gamma'' \in \mathcal{C}$ tel que $\Gamma' \cap \Gamma'' \neq \emptyset$ et $\dim\Gamma'' < \dim\Gamma$, ce qui est impossible.

Grace à (1), il suffit de prouver que si Γ et Γ' sont des feuilles de $\mathcal{C}$, alors

$$\Gamma' \cap \partial\Gamma \neq \emptyset \Longrightarrow \Gamma' \subset \partial\Gamma.$$

Nous procédérons par récurrence double: une croissante sur $k = \dim \Gamma$ et l'autre décroissante sur $r = \dim \Gamma'$.

On peut supposer que

$$\text{(3)} \qquad \Gamma' \cap \partial\Gamma \text{ est ouvert dans } \partial\Gamma.$$

En efffet, sinon, il existerait un point $a \in (\partial\Gamma \cap \Gamma') \cap \overline{\partial\Gamma \setminus \Gamma'}$. Donc, (par (1)), on aurait $a \in \overline{\Gamma''}$ pour une feuille $\Gamma'' \in \mathcal{C}$ de dimension $\leqslant k-1$ et telle que $\partial\Gamma \cap \Gamma'' \neq \emptyset$, $\Gamma'' \neq \Gamma$; alors $a \in \partial\Gamma''$. Il en résulte (par (2)) que $\dim \Gamma'' > r$. Vu que $a \in \Gamma' \cap \partial\Gamma''$ et l' hypothése de recurrence sur k, on aurait $\Gamma' \subset \partial\Gamma''$ et puis, par l'hypothése de recurrence sur r, $\Gamma'' \subset \partial\Gamma$; par conséquent $\Gamma' \subset \partial\Gamma$.

Maintenant il suffit de prouver que

$$\Gamma' \cap \partial\Gamma \text{ est ouvert dans } \Gamma''$$

(parce qu'il est fermé et alors sera égal à Γ', vu que Γ est connexe).

Prenons un point $c \in \Gamma' \cap \partial\Gamma$. On a donc, $r < k$, grâce à (2). Par (3) on a

$$\text{(4)} \qquad U' \cap \partial\Gamma \subset \Gamma',$$

avec un voisinage $U' = U_1 \times U_2'$ du point $c = (a, b)$, où U_2 est un voisinage de a dans $\mathbb{R}^k$ et U_2' est un voisinage de b dans $\mathbb{R}^{n-k}$. Comme $\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ est une application analytique d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ et $\Gamma' : \Gamma_0 \to \mathbb{R}^{n-k}$ est une application analytique d'une feuille semi-analytique Γ_0 de $\mathbb{R}^k$, on a

$$\text{(5)} \qquad \Gamma_0 \cap \Omega = \emptyset$$

Soit $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection naturelle. Soit U_2 un voisinage ouvert de b tel que $\overline{U_2} \subset U_2'$ et soit $U = U_1 \times U_2$. Alors, par (4), on a $\partial\Gamma \cap (a \times \overline{U_2}) = c$, mais, par (5), $(a \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \Gamma = \emptyset$; donc, il en resulte que $\overline{\Gamma} \cap (a \times \overline{U_2}) = c$, d'où $\overline{\Gamma} \cap (U_{11} \times \overline{U_2}) \subset U$ pour un voisinage $U_{11} \subset U_1$ de a. Ainsi, après avoir diminué U_1 à U_{11}, $\overline{\Gamma} \cap (U_1 \times \overline{U_2}) \subset U$. Soit $\Omega_0 = \pi(\Gamma \cap U)$. On a

$$\text{(6)} \qquad x \in \partial\Omega_0 \cap U_1 \Longrightarrow (u, t') \in \partial\Gamma \cap U \text{ avec un } t'.$$

Car, pour un t' on a $(x, t') \in \overline{\Gamma} \cap (U_1 \times \overline{U_2}) \setminus (\Gamma \cap U) \subset U \setminus \Gamma$.

Par (4) on a $(x, t') \in \Gamma$, donc $x \in \Gamma_0$, et $\partial\Omega_0 \cap U_1 \subset \Gamma_0$. Selon le lemme (pour Ω_0 et Γ_0) $\Gamma_0 \cap U_1'' \subset \Omega_0$ avec un voisinage $U_1'' \subset U_1$ de a.

On aura maintenant, $\Gamma' \cap U'' \subset \partial\Gamma$, d'où $U'' = U_1'' \times U_2$ (ce qui terminera la preuve). En effet, si $(x, t) \in \Gamma' \cap U''$, on a $x \in \Gamma_0 \cap U_1''$, donc $x \in \partial\Omega_0$, d'où, grâce à (6), on a $(x, t') \subset \partial\Gamma \cap U$ avec un t'. Alors, par (4), on a $(x, t') \in \Gamma'$, ce qui donne enfin $t = t'$ et $(x, t) \in \partial\Gamma$.

La condition (b) implique qu'il existe une suite des stratifications distinguées $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}, \ldots, \mathcal{C}_1$ des pavés $\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n, \ldots, \mathcal{Q}_1 \subset \mathbb{R}$ avec $\mathcal{Q}_k = \pi_k(\mathcal{Q}_{k+1})$ où $\pi_k : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$, $\pi_k((x_1, \ldots, x_{k+1})) = (x_1, \ldots, x_k)$, telle que chaque feuille $\Gamma \in \mathcal{C}_{k+1}$ de dimension $\leqslant k$ est le graphe d'une application analytique $\Gamma : \Gamma' \to \mathbb{R}$ avec $\Gamma' \in \mathcal{C}_k$.

Soit Γ un strate de $\mathcal{C}$. On définie par récurrence $\Gamma_n = \Gamma$, $\Gamma_k = \pi_k(\Gamma_{k+1}) \in \mathcal{C}_k$. Soit P_k un polynôme associé à $\mathcal{C}_k$. On a alors:
Remarque 3. Si Γ es une feuille de dimension l, alors

$$\Gamma \subset \left\{ P_n^{\Gamma_n} = \cdots = P_{n-l}^{\Gamma_{n-l}} = 0 \right\}$$

Ceci implique, vu le théorème des fonctions implicites (voir p.e. [4] 123), le fait suivant:

Corollaire. *Il existe une application analytique $F : U \to \mathbb{R}^{n-l}$ d'un voisinage U de $\overline{Q}$ telle que $T_x\Gamma = \operatorname{Ker} d_x F$, pour tout $x \in \Gamma$.*

En effet, il suffit de prendre $F = \left(P_n^{\Gamma}, \ldots, P_{n-l}^{\Gamma_{n-l}}\right)$, comme le jacobien de F par rapport à $(x_{l+1}, \ldots, x_n)$ est

$$\prod_{j=l+1}^{n} \frac{\partial P_j^{\Gamma_j}}{\partial x_j} \neq 0 \quad \text{dans } \Gamma .$$

Observons enfin :
Remarque 4. Il existe un pavé arbitrairement petit $Q' \subset Q$, arbitrairement petit, telle que les traces des feuilles de $\mathcal{C}$ sur Q' forment une stratification distinguée de Q'[4].

2. THÉORÈME PRINCIPAL

Nous allons énoncer le théorème qui est le but de ce travail.

Théorème des stratifications distinguées. *Soient $E_1, \ldots, E_q$ des sous-ensembles semi-analytiques quelconques d'un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, après un changement linéaire de coordonées dans $\mathbb{R}^n$, il existe une stratification distinguée d'un pavé $Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\}$, arbitrairement petit*[5] , *qui est compatible avec tous les $E_1, \ldots, E_q$.*

On voit que le théorème implique facilement

Théorème de l'adhérence. *L' adhérence d'un semi-analytique est un semi-analytique.*

Théorème de composantes connexes. *La famille de composantes connexes d'un semi-analytique est localement finie et chacune de ces composantes connexes est semi-analytique.*

Il s'ensuit que :
Un sous-ensemble d'un semi-analytique E , lequel est ouver-fermé dans E, est toujours semi-analytique. Le théorème d'adhérence entraîne visiblement les deux propietées suivantes de la dimension :

(1) $\dim(\overline{E} \setminus E) < \dim E$ si $E \neq \emptyset$.
(2) $\dim \overline{E} = \dim E$.

[4] "arbitrairement petit" veut dire que chaque voisinage (de 0) contient un tel pavé.
[5] Voir la remarque 4 de 1.

(vu que pour une feuille Γ d'une stratification distinguée on a $\dim \partial\Gamma < \dim \Gamma$).

Remarque. La restriction d'une stratification distinguée d'un voisinage Q à un voisinage ouvert $Q' \subset Q$ est encore une stratification distinguée.

3. LEMMES AUXILIERES

Considerons le polynôme "générique" $P_c(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \cdots + c_k$, où $z \in \mathbb{C}$ et $c = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{C}^k$. Posons

$$W_s = \{c \in \mathbb{C}^k : P_c(z) \text{ a au plus s racines distinctes } \}.$$

Soient $K = \{1, \ldots, k\}$ et

$$\mathcal{D}_s(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{\substack{J \subset K \\ \# J = k-s}} \prod_{\substack{\mu < \nu \\ \mu,\nu \in J}} (z_\mu - z_\nu)^2 \quad , \quad s = 0, \ldots, k-1 \, .$$

Comme $\mathcal{D}_s(z_1, \ldots z_k)$ est un polynôme symmétrique, on a $\mathcal{D}_s = D_s \circ \sigma$ avec $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ les fonctions symmétriques élémentaires (par le théorème des fonctions symmétriques). On appelle les D_s "discriminants généralisés" (voir p. ex. Mostowski [6] p. 10).

Lemme 1. *On a la formule :* $W_s = \{c \in \mathbb{C}^k : D_0(c) = \cdots = D_{k-s-1}(c) = 0\}$.

En effet, si $c \in W_s$ et $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_k)$ est une suite complète des racines de $P_c(z)$ on a $\#\{z_1, \ldots, z_k\} \leqslant s$, donc $\mathcal{D}_0(\underline{z}) = \cdots \mathcal{D}_{k-s-1}(\underline{z}) = 0$; ce qui implique $D_0(c) = \cdots = D_{k-s-1}(c) = 0$.

Soit $c \in \mathbb{C}^k$ tel que $D_0(c) = \cdots = D_{k-s-1}(c) = 0$. Soit $(z_1, \ldots, z_k)$ une suite complète des racines de P_c. Si on aurait $c \notin W_s$, $s + 1 \leqslant \#\{z_1, \ldots, z_k\} = t$; soient $z_1, \ldots z_t$ les t racines distinctes de $P_c(z)$: alors

$$\mathcal{D}_j(z_1, \ldots, z_k) = D_j(c) = 0 \qquad \text{si} \quad j = 0, 1, \ldots k - s - 1 \; ;$$

comme $k - t \leqslant k - s - 1$,

$$0 \;=\; \mathcal{D}_{k-t}(z_1, \ldots, z_k) \;=\; \prod_{\substack{\mu < \nu \\ \mu,\nu \in \{1,\ldots,t\}}} (z_\mu - z_\nu)^2 ,$$

c'est qui est absurde.

Une conséquence inmediate du lemme 1 est

Lemme 2. *L'ensemble* W_s *est algébrique.*

Corollaire. *Soit* G *un ouvert de* $\mathbb{C}^n$ *et considérons un polynôme*

$$P(v, z) = z^k + c_1(v) z^{k-1} + \cdots c_k(v)$$

à coefficients $c_1, \ldots, c_k$ *holomorphes dans* G. *Soit* a *un point de* G *tel que* $P(a, .)$ *a précisément* r *racines distinctes. Alors, il existe un voisinage ouvert* U *de* a *tel que l'ensemble suivant est analytique:*

$$Z = \{v \in U : P(v, .) \quad \textit{a précisément } r \textit{ racines distinctes } \}.$$

En effet, le lemme 2 implique que pour $s \in \{0, \ldots, k\}$ quelconque l'ensemble

$$Z_s = \{v \in G : P(v, .) \quad \text{a au plus } s \text{ racines distinctes }\}$$

est analytique, comme il est l'image réciproque de l'ensemble W_s du lemme 2 par l'application holomorphe $(c_1, \ldots, c_k) : G \to \mathbb{C}^k$. Or l'ensemble

$$R = \{v \in G : P(v, .) \quad \text{a précisément } r \text{ racines distinctes }\}$$

est égale à $Z_r \setminus Z_{r-1}$. Vu que $a \notin Z_{r-1}$, on peut choisir U disjoint avec Z_{r-1} et alors l'ensemble $Z = R \cap U = Z_r \cap U$ est analytique dans U.

4. LEMME DE BASE ET SES CONSÉQUENCES

Le suivant lemme joue un rôle essentiel dans la preuve.

Lemme de base. *Soit G un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et considerons*

$$P(v, z) = z^k + c_1(v)z^{k-1} + \cdots + c_k(v)$$

un polynôme unitaire à coefficients holomorphes dans G. Supposons que le nombre r de racines distinctes de $z \mapsto P(v, z)$ ne dépend pas de v dans G. Alors, si $c \in G$, il existe un voisinage ouvert U de c , tel que

$$\{(v, z) \in U \times \mathbb{C} : P(v, z) = 0\} = \zeta_1 \cup \cdots \cup \zeta_r$$

où ζ_i sont des graphes des fonctions holomorphes et $\zeta_i \neq \zeta_j$ dans U, lorsque $i \neq j$.

Pour le démontrer on va utiliser le lemme suivant:

Lemme. *Soit Q un polynôme unitaire à coefficients holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Supposons que le polynôme $Q(v, .)$ n'a qu'une seule racine $\zeta(v)$ dans Ω et que la multiplicité de cette racine ne dépend pas de v dans U. Alors la fonction $\zeta : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe.*

En effet, si l'on note avec r cette multiplicité, on a alors

$$\frac{\partial^{r-1} Q}{\partial z^{r-1}}(v, \zeta(v)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^r Q}{\partial z^r}(v, \zeta(v)) \neq 0.$$

La fonction ζ est continue vu le théorème de continuité des racines (voir p. ex. [4], pag. 87) et le fait que $\zeta(v)$ est la racine unique de $Q(v, .)$ dans Ω. Ceci implique le lemme par le théorème des fonction implicites (voir p. ex. [4], pag. 109).

Passons à la preuve du lemme de base. Soit $(z_1, \ldots, z_k)$ la suite compléte des racines de $P(c, .)$. On a une partition $K = I_1 \cup \cdots \cup I_r$, où $I_i = \{\nu \in K : z_\nu = a_i\}$ et $a_1, \ldots, a_r$ sont toutes les racines distinctes de $P(c, .)$ ([6]) . Soit un $\delta > 0$

[6]) Rappelons que $K = \{1, \ldots, k\}$

tel que $\delta < \frac{1}{2}\min\{|a_i - a_j| : i \neq j\}$. Par le théorème de continuité des racines, il existe un voisinage ouvert U de c tel que si $v \in U$ on peut arranger la suite complete $z_1', \ldots, z_k'$ de $P(v,.)$ de maniére que $|z_i' - z_i| < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant k$. En notant $B_i = \{w \in \mathbb{C}^n : |w - a_i| < \delta\}$ on a donc $z_\nu \in B_i$, $\nu \in I_i$. Observons que les boules B_i sont disjointes. Par conséquent tous les z_ν', $\nu \in I_i$ sont égals. Notons-les avec $\zeta_i(v)$. Par le lemme (avec $\Omega = B_i$) toutes les ζ_i sont forcément holomorphes dans U.

Le lemme de base implique certaines consequences dans le cas réel que nous allons utiliser.

Corollaire 1. *Soit Γ une sous-varieté analytique dans $\mathbb{R}^m$ et soit*

$$P(u,x) = x^k + a_1(u)x^{k-1} + \cdots + a_k(u)$$

un polynôme unitaire à coefficients analytiques réels sur Γ. Supposons que le nombre r de racines **complexes** *de $z \mapsto P(u,z)$ ne dépend pas de u. Alors, si $c \in \Gamma$, il existe un voisinage ouvert U de c dans Γ tel que*

$$\{(u,z) \in U \times \mathbb{C} : P(u,z) = 0\} = \xi_1 \cup \cdots \cup \xi_r$$

où $\xi_i : U \to \mathbb{C}$ sont analytiques, ou bien réelles ou bien telles que $\operatorname{Im}\xi_i \neq 0$ dans U.

En effet, on peut supposer que $\Gamma = G \subset \mathbb{R}^m$ avec $m = \dim\Gamma$ (en faisant un changement analytique de coordonées vu que l'assertion est local). On peut prendre les complexifications $\widetilde{a}_i$ holomorphes dans un ouvert $\widetilde{G}$ de c dans $\mathbb{C}^m$ (consideré comme une extension de $\mathbb{R}^m$) et de maniére que $U = \widetilde{G} \cap \mathbb{R}^m \subset G$ et $\widetilde{a}_i = a_i$ dans U. On peut admettre que U et $\widetilde{G}$ soient connexes (p. ex., en prenant des boules). Considérons le polynôme

$$\widetilde{P}(w,z) = z^k + \widetilde{a}_1(w)z^{k-1} + \cdots + \widetilde{a_k}(w)$$

Par le corollaire de **3**, l'ensemble

$$Z = \{w \in \widetilde{G} : \widetilde{P}(w,.) \text{ a précisément } r \text{ racines complexes distinctes}\}$$

est analytique. On peut supposer que $\widetilde{G}$ est defini par certaines fonctions holomorphes (après avoir diminué $\widetilde{G}$). Comme ces fonctions s'annulent sur $U \subset G$, on a forcément $Z = \widetilde{G}$. C'est-à-dire $\widetilde{P}(w,.)$ a précisément r racines distinctes pour chaque $w \in \widetilde{G}$. Selon le lemme de base, après avoir diminué $\widetilde{G}$, on a $Z = \zeta_1 \cup \cdots \cup \zeta_r$ où $\zeta_j : \widetilde{G} \to \mathbb{C}$ sont holomorphes et $\zeta_i \neq \zeta_j$ lorsque $i \neq j$. Il en résulte que

$$V = \{(u,z) \in U \times \mathbb{C} : P(u,z) = 0\} = \xi_1 \cup \cdots \cup \xi_r$$

où $\xi_i = (\zeta_i)_U : U \to \mathbb{C}$ sont analytiques. Comme on a aussi $V = \overline{\xi_1} \cup \cdots \cup \overline{\xi_r}$ et U est connexe, alors pour tout i on a forcément $\xi_i = \overline{\xi_j}$ avec un j; si $i = j$ alors ξ_i est réelle, si non , nous avons $\xi_i \neq \overline{\xi_i}$ dans U, c'est-à-dire $\operatorname{Im}\xi_i \neq 0$ dans U.

Il résulte de la preuve du lemme et du corollaire la suivante:

Remarque 1. On peut completer le corollaire 1 avec l'observation que pour chaque $j = 1, \ldots, r$, il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\partial^t P}{\partial x^t}(u, \xi_j(u)) = 0 \quad , \qquad \text{pour } t \leqslant l$$
$$\frac{\partial^{l+1} P}{\partial x^{l+1}}(u, \xi_j(u)) \neq 0$$

dans U.

Corollaire 2. *Sous les hypothèses et les notations du corolaire 1, supposons que R est un diviseur de P dans l'anneau de polynômes réels à coefficients analytiques sur Γ . Supposons en plus que R soit unitaire. Alors chaque point $c \in \Gamma$ posséde un voisinage ouvert W tel que*

$$\{(u, x) \in W \times \mathbb{R} : R(u, x) = 0\} = (\xi_{\alpha_1})_W \cup \cdots \cup (\xi_{\alpha_s})_W$$

avec certains $\alpha_1 < \cdots < \alpha_s$.

Pour le voir, observons que toutes les racines de $R(c, .)$ sont précisément: $\xi_{\beta_1}(c), \ldots, \xi_{\beta_s}(c)$ avec $\beta_1 < \cdots < \beta_s$. En prenant un voisinage ouvert W suffisamment petit on vérifie facilement que l'on a

$$\{(u, z) \in U \times \mathbb{C} : R(u, z) = 0\} = (\xi_{\beta_1})_W \cup \cdots \cup (\xi_{\beta_s})_W$$

en utilisant le corollaire 1 deux fois, une pour R et l'autre pour P.

Proposition 1. *Sous les hypothése du corollaire 1 , si l'on suppose de plus que Γ soit connexe, on a*

$$\{(u, x) \in \Gamma \times \mathbb{R} : P(u, x) = 0\} = \xi_1 \cup \cdots \cup \xi_q$$

où $\xi_i : \Gamma \to \mathbb{R}$ sont analytiques réelles et $\xi_1 < \cdots < \xi_q$ dans Γ.

En effet, on a l'assertion localement, c'est-à-dire avec un voisinage (dans Γ) d'un point $c \in \Gamma$ quelconque, au lieu de Γ. Par conséquent chacun des ensembles

$$\{u \in \Gamma : P(u, .) \quad \text{a précisément } j \text{ racines réelles }\}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

est égal à Γ où vide. Ceci montre que le nombre q des racines distinctes réelles de $P(u, .)$ ne dépend pas de u comme il est une fonction continue de u. Aprés les avoir ordonées localement on obtient les racines analytiques $\xi_1, \ldots, \xi_q$ dans Γ.

Grâce à la remarque 1, il en résulte la suivante:

Remarque 2. On peut completer la proposition 1 avec l'observation que sur chaque ξ_j, $j = 1, \ldots, q$, l'ordre $\xi_j \ni x \longmapsto \mathrm{ord}_x P$ est constant.

Proposition 2. *Sous les hypothéses et les notations de la proposition 1, supposons que R est un diviseur de P dans l'anneau de polynômes réels à coefficients analytiques sur Γ. Supposons en plus que R soit unitaire. Alors on a*

$$\{(u,x) \in \Gamma \times \mathbb{R} : R(u,x) = 0\} = \xi_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \xi_{\alpha_s}$$

avec certains $\alpha_1 < \cdots < \alpha_s$.

Ceci résulte du corollaire 2 vu que Γ est connexe chacun des ensembles $\{u \in \Gamma : R(u,.)$ a précisement j racines distinctes $\}$, $j = 1, 2, \ldots$, est ou bien Γ ou bien vide, ce qui donne la thése.

5. LEMME DE THOM

Lemme de Thom. *Soit P un polynôme d'une variable réelle de degré k et soit $\Theta = (\theta_0, \ldots, \theta_{k-1})$, avec θ_r égal à $(-\infty, 0)$ ou à $\{0\}$ ou à $(0, \infty)$, $(r = 0, \ldots, k-1)$. Alors, l'ensemble*

$$\Delta_\Theta = \{t \in \mathbb{R} : \frac{d^r P}{dt^r}(t) \in \theta_r,\ 0 \leqslant r \leqslant k-1\}$$

est connexe: soit un intervalle ouvert, soit réduit à un point, soit vide.

En efect, l'assertion étant évidente pour $k = 0$, supposons la vraie pour $k-1$ avec un $k > 0$, et applicons-la à P'. On a

$$\Delta_\Theta = \{t \in \mathbb{R} : P(t) \in \theta_0\} \cap \Delta_1$$

où $\Delta_1 = \{t \in \mathbb{R} : \frac{d^j P}{dt^j}(t) \in \theta_j,\ j = 1, \ldots, k-1\}$. Le cas où Δ_1 est vide ou se réduit à un point étant trivial, supposons que Δ_1 est un intervalle ouvert (par la récurrence); on a alors $P'(x) \neq 0$ dans Δ_1, donc P est strictement monotone dans Δ_1, d'où $\Delta_\Theta = \{x \in \Delta_1 : P(x) > 0\}$, soit $\Delta_\Theta = \{x \in \Delta_1 : P(x) = 0\}$, soit $\Delta_\Theta = \{x \in \Delta_1 : P(x) < 0\}$.

Corollaire. *Soient $\tau_1 < \cdots < \tau_N$ toutes les racines des polynômes $P, P', \ldots, P^{(k-1)}$. Alors la famille des Δ_Θ non vides est egal à :*

$$\{(-\infty, \tau_1), \{\tau_1\}, (\tau_1, \tau_2), \{\tau_2\}, \ldots, (\tau_N, \infty)\}.$$

Pour le vérifier, on observe que chacun des ensembles de la seconde famille est contenue dans un de la première, tandis que la réciproque est vraie par le lemme de Thom.

6. PREUVE DU THÉORÉME PRINCIPAL

Nous allons démontrer le théorème énoncé dans **2** par récurrence sur la dimension n de l'espace. Il suffit de trouver une stratification compatible avec les fonctions qui décrivent $E_1, \ldots, E_q$ dans un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$. Après un changement linéaire de coordonées on a un nombre fini des polynômes distingués en variable x_n qui les décrivent, $R_1, \dots, R_s$. Posons

$$(*) \qquad R = \prod_{j=1}^{s} R_j \quad , \quad k = \deg_{x_n} R \quad ,$$

et

$$P = \frac{1}{C} R \frac{\partial R}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial^{k-1} R}{\partial x_n^{k-1}}$$

avec une constane C $(= \prod_{j=0}^{k-1} (k-j)^{k-1-j})$ telle que P soit unitaire. Soit $l = \deg_{x_n} P$. Pour chaque $s \in \{1, \dots, l\}$ posons

$$A_s = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} \, : \, P(u,.) \text{ a précisément } s \text{ racines complexes distinctes } \}$$

Par le lemme 2 de **3**, A_s est un ensemble semi-analytique dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Donc, il existe une stratification distinguée $\mathcal{C}'$ d'un voisinage ouvert Q' de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, compatible avec tous les A_s. Si

$$A_s = \bigcup_{\substack{\Gamma'_{st} \in \mathcal{C}' \\ t=1,\dots,n_s}} \Gamma'_{st} \quad , \Lambda_{st} = \{(u, x_n) \in \Gamma'_{st} \times \mathbb{R} \, : \, P(u, x_n) = 0\} ,$$

on a par la proposition 1 de **4** :

$$(\square) \qquad \Lambda_{st} = \xi_{st}^{(1)} \cup \dots \cup \xi_{st}^{(r_{st})} \qquad \text{avec } \xi_{st}^{(1)} < \dots < \xi_{st}^{(r_{st})} \quad .$$

Observons que d'après la remarque 2 de **4**, sur chaque $\xi_{st}^{(j)}$ l'ordre $x \longmapsto \operatorname{ord}_x P$ est constant. Après avoir diminué Q', nous pouvons supposer que les fonctions

$$\xi_{st}^{(j)} \quad , \quad 1 \leqslant s \leqslant l \quad , \quad 1 \leqslant t \leqslant n_s \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant r_{st}$$

sont bornées par un $\delta > 0$ arbitrairement petit. Par conséquent on peut avoir le pavé de $\mathbb{R}^n$, $Q = Q' \times (-\delta, \delta)$ contenu dans U. Prenons la partition de Q , suivante

$$\mathcal{C} = \left\{ \xi_{st}^{(j)} \right\}_{s,t,j} \bigcup \left\{ \text{composantes connexes de } Q \setminus \bigcup_{s,t,j} \xi_{st}^{(j)} \right\} .$$

Pour $s \in \{1, \dots, n\}$, $t \in \{1, \dots, n_s\}$, posons

$$B_{st}^{(0)} = \{(u, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : x_n < \xi_{st}^{(1)}(u)\} ,$$

$$B_{st}^{(j)} = \{(u, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : \xi_{st}^{(j)}(u) < x_n < \xi_{st}^{(j+1)}(u)\} , \quad j = 1, \dots, r_{st} - 1$$

$$B_{st}^{(r_{st})} = \{(u, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : x_n > \xi_{st}^{(r_{st})}(u)\} ,$$

$$Z_{st}^{(j)} = \{(u, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : x_n = \xi_{st}^{(j)}(u)\} , \qquad j = 1, 2, \dots, r_{st} .$$

Il s'ensuit de la construction que la famille

$$C' = \left\{Z_{st}^{(j)}\right\}_{s,t,j} \bigcup \left\{B_{st}^{(j)}\right\}_{s,t,j}$$

est une partition de $\mathcal{Q}$, plus fine que $\mathcal{C}$. Il suffit donc de vérifier que les $B_{st}^{(j)}$ et les $Z_{st}^{(j)}$ sont semi-analytiques. Soit $\Theta = (\theta_0, \ldots, \theta_{k-1})$ avec $\theta_j \in \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}$. Posons

$$C_{\Theta,s,t} = \left\{(u, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) \quad : \quad \frac{\partial^p R}{\partial x_n^p}(u, x_n) \in \theta_p \, , \, 0 \leqslant p \leqslant k-1\right\}$$

Soit $u \in \Gamma'_{st}$. Pour chaque $j = 0, \ldots r_{st}$ il existe un $\Theta_j^B(u) = (\theta_0, \ldots, \theta_{k-1})$ unique avec $\theta_j = (-\infty, 0)$, ou bien $\{0\}$, ou $(0, \infty)$ tel que

$$\left(B_{st}^{(j)}\right)_u = \left(C_{\Theta_j^B(u),s,t}\right)_u$$

(grâce au corollaire du lemme de Thom). De même, pour chaque $j = 1, \ldots r_{st}$ il existe $\Theta_j^Z(u) = (\theta_0, \ldots, \theta_{k-1})$ unique avec $\theta_j = (-\infty, 0)$, ou bien $\{0\}$, ou $(0, \infty)$ tel que

$$\left(Z_{st}^{(j)}\right)_u = \left(C_{\Theta_j^Z(u),s,t}\right)_u \ .$$

Les applications

$$\Theta_j^B \,:\, \Gamma'_{st} \ni u \longmapsto \Theta_j^B(u) \in \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}^k$$
$$\Theta_j^Z \,:\, \Gamma'_{st} \ni u \longmapsto \Theta_j^Z(u) \in \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}^k$$

sont localement constantes grâce à la continuité des $\xi_{st}^{(j)}$ et $\frac{\partial^p R}{\partial x_n^p}$, donc constantes, vu que Γ'_{st} sont connexes. On a donc $B_{st}^{j)} = C_{\Theta_j^B,s,t}$, $Z_{st}^{(j)} = C_{\Theta_j^Z,s,t}$. Ceci montre l'inclusion $C' \subset \{C_{\Theta,s,t}\}_{\Theta,s,t}$.

Par conséquent les éléments de la partition $\mathcal{C}$ sont des feuilles semi-analytiques. Ensuite, la partition C' est compatible avec les $E_1, \ldots, E_q$, comme elle est compatible avec tous les R_t , grâce à la proposition 2 de **4** et vu la définition de $C_{\Theta,s,t}$ et l'égalité $(*)$. Il en est de même avec $\mathcal{C}$, parce que l'on a $R_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, s$, sur chaque composante connexe de $\mathcal{Q} \setminus \bigcup\limits_{s,t,j} \xi_{st}^{(j)}$.

Par la construction, les conditions (b) et (c) des partitions distinguées sont satisfaites. Comme on a

$$V = \{x \in \mathcal{Q} : P(x) = 0\} \ ,$$

la condition (a) résulte de la proposition de **1**. Ceci termine la démonstration.

Le théorème entraîne les faits suivants :

Remarque 1. L'ensemble des changements linéaires de coordonnées après lesquels la thése du théorème des stratifications distinguées subsiste, est dense. Il en résulte que si $E_1, \dots, E_q \subset \mathbb{R}^n$ sont semi-analytiques et $a \in \mathbb{R}^n$, alors pour chaque sous-espace linéaire $N \subset R^n$ de dimension k d'un sous-esemble dense de $\mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$ il existe un voisinage arbitraiment petit V de a tel que les images des $E_1 \cap V, \dots, E_q \cap V$ par la projection parallélement à N (sur un supplémentaire de N quelconque) soient semi-analytiques.

Il est clair que l'on a démontré l'énnoncé suivant :

Corollaire. *Soient $E_1, \dots, E_q$ des sous-ensembles semi-analytiques, décrits par des polynômes distingués $R_1, \dots, R_s$ dans un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, après un changement $x_1, \dots x_{n-1}$ de coordonées dans $\mathbb{R}^{n-1}$, il existe une stratification distinguée d'un pavé $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\}$ qui est compatible avec tous les $E_1, \dots, E_q$.*

Remarque 2. Observons qu'il résulte de la preuve du théorème que l'on peut avoir dans le corollaire une stratification $\mathcal{C}'$ compatible avec un nombre fini des fonctions analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, aussi qu'avec un nombre fini des ensembles semi-analytiques.

7. SUR LES SEMI-ANALYTIQUES DE DIMENSION $\leqslant 1$

7.1. On appellle *arc semi-analytique* (de $\mathbb{R}^n$) une sous-varieté analytique $\lambda \subset \mathbb{R}^n$ isomorphe à l'intervalle $(0, 1)$, semi-analytique dans $\mathbb{R}^n$, relativement compact et tel que si $\phi : (0, 1) \to \lambda$ est un isomorphisme analytique, les limites de ϕ dans 0 et dans 1 – on va vérifier qu'ils existent toujours – sont distinctes. On les appelle les *extremitées de l'arc.*

En effet, ceci résulte du théorème des composantes connexes. À savoir, supposons que par examplc la limite de ϕ en 0 n'existe pas. Alors on aurait deux points limites $a \neq b$. Soit H l'hyperplan perpendiculier au segment $[a, b]$ et qui passe par le point $\frac{a+b}{2}$. L'ensemble $H \cap \lambda$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, ce qui donne facilement une contradiction.

7.2. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \overline{E}$. On défini le *cône tangent $C_a(E) \subset \mathbb{P}^n$ de E au point a* de la manière suivant: on considère l'application

$$W : E \setminus a \ni x \mapsto \mathbb{R}(x - a) \in \mathbb{P}^{n-1}$$

et le cône est défini par l'égalité $\overline{W}|_a = a \times C_a(E)$. Il en résulte facilement que si f est une fonction analytique dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, qui n'est pas identiquement nulle, alors

$$C_0(\{ f = 0 \}) \subset \{ f_\nu = 0 \} \subset \mathbb{P}^{n-1}$$

où f_ν est la forme initial de f. Ensuite, si E est un ensemble semi-analytique décrit dans un voisinage de 0 par les fonctions analytiques $f_1, \dots, f_t$, on a

$$C_0(E) \subset \{ h_1 = 0 \} \cup \dots \cup \{ h_t = 0 \} \subset \mathbb{P}^{n-1},$$

où h_j est la forme initial de f_j.

7.3 On va démontrer la proposition suivante:

Proposition. *Soit* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\pi((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_k)$. *Pour chaque* E *semi-analytique, borné et de dimension* $\leqslant 1$, *l'image* $\pi(E)$ *est un semi-analytique borné et de dimension* $\leqslant 1$.

On aura besoin de deux lemmes.

Lemme 1. *Tout semi-analytique* E *de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* $\leqslant 1$ *et borné est une réunion finie des arcs semi-analytiques et des points. Après un changement linéaire des coordonnées, chacun de ces arcs est le graphe d'une application analytique d'un intervalle (ouvert et borné) dans* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Il suffit de démontrer le lemme pour $E \cap U$, où U est un voisinage d'un point de $\overline{E}$. Soit donc a un point de $\overline{E}$. Évidement on peut supposer que $a = 0$. Alors, d'après le théorème des stratifications distinguées, après un changement de coordonées il existe une stratification distinguée $\mathcal{C}$ d'un intertvalle Q de $\mathbb{R}^n$ compatible avec $E \cap Q$, c'est-à- dire, $E \cap Q = \bigcup \Gamma_j$ où $\Gamma_j \in \mathcal{C}$. Comme on a $\dim E \cap Q \leqslant 1$, donc, par la définition de la dimension (voir l'introduction), on a necesairement $\dim \Gamma_j \leqslant 1$. Donc, chaque Γ_j est un point ou un graphe d'une application analytique d'un intervalle (ouvert et borné) de $\mathbb{R}$ donc un arc semi-analytique (vu le lemme 1 de **1**).

Lemme 2. *Soit* $n \geqslant 2$ *et soit* Γ *un arc semi-analytique de* $\mathbb{R}^n$ *ayant* 0 *pour une extrémité. Supposons que* Γ *n'est pas contenu dans l'axe* I *des* x_n. *Alors, il existe une fonction analytique* F *dans un voisinage ouvert* W *de* 0 *tel que* F *est* x_n*-régulière et* $F = 0$ *sur* $\Gamma \cap W$.

Preuve. On procède par récurrence sur n.

Supposons que $n = 2$. Notons les coordonées avec $x = x_1$, $y = x_2$. Pour un voisinage W' de 0, l'ensemble $\Gamma \cap W'$ est une réunion des ensembles

$$\{ h_i = 0 \} \cap G_i \qquad i = 1, \dots, s$$

avec des $h_i \not\equiv 0$ analytiques dans W' et des ouverts semi-analytiques G_i. Il en resulte que la fonction analytique $h = h_1 \cdots h_s \not\equiv 0$ s'annulle sur $\Gamma \cap W'$. On a le développement

$$h(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(y) x^i$$

dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$, avec $a_i(y)$ analytiques dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$. Alors, on a $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$ et $a_k \not\equiv 0$ dans un voisinage connexe de $0 \in \mathbb{R}$. Par conséquent

$$h(x, y) = x^k F(x, y)$$

où $F(x, y) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i(y) x^{i-k}$ est analytique dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Alors F est y-régulière (vu que $F(0, y) = a_k(y)$) et s'annule sur $\Gamma \cap W$, pour un voisinage $W \subset W'$ ouvert de $0 \in \mathbb{R}^2$.

Passons au cas général avec $n \geqslant 3$. S'il existe un plan H qui contient I et Γ on se remène au cas $n = 2$. Car on peut admettre que $H = \mathbb{R}^2 \times 0$ et alors $F \circ p$ est une fonction demandée où $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ est la projection naturel.

Supposons que I et Γ ne soient pas contenus dans aucun plan. On va procéder par récurrence sur n. Il existe un voisinage U de 0 tel que $\Gamma \cap U$ soit décrit par les fonctions $f_1 \not\equiv 0, \ldots, f_r \not\equiv 0$. Alors, on a

$$(*) \qquad C_0(\Gamma) \subset C = \{h_1 = 0\} \cup \cdots \cup \{h_r = 0\}$$

où h_j est la forme initial de f_j (voir **7.2**). Évidement $D = \mathbb{P}^{n-1} \setminus C$ est un ouvert dense dans $\mathbb{P}^{n-1}$.

On va démontrer qu'il existe un changement linéaire de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ après lequel les deux conditions suivantes soient satisfaites. Soit $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la projection naturel, $\pi(x_1, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.
(1) Il existe un voisinage W de $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Gamma^* = \pi(\widetilde{\Gamma})$ où $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cap W$ est un arc semi-analytique.
(2) Γ^* n'est pas contenu dans l'axe des x_{n-1}.

En effet, prenons un $\lambda \in D$ tel que $\lambda \neq I$. On fait un changement de coordonnées tel que λ soit l'axe des x_n et I soit l'axe des x_{n-1}. Alors, par $(*)$, les fonctions devient x_n-régulières, et par le théorème de préparation on peut les remplacer par des polynômes distingués dans la description de Γ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Selon le corollaire du **6**, Γ est une réunion finie des arcs semi-analytiques et des points, et leurs projections sont aussi des arcs semi-analytiques ou des points. Un de ces arcs, $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$, admet 0 comme extremité. Comme il est ouvert dans Γ, on a $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cap W$ avec un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Il est impossible que $\pi(\Gamma)$ soit un point, parce que alors Γ serait contenu dans une droite (l'axe des x_n) et donc Γ et I seraient contenus dans le même plan. Donc Γ^* est un arc semi-analytique. La condition (2) est évidement satisfaite, parce que si non, Γ serait contenu dans le plan $0 \times \mathbb{R}^2$.

Par l'hypothèse de récurrence et grâce aux conditions (1) et (2), il existe une fonction F^*, analytique dans un voisinage W^*, x_{n-1}-régulière et $F^* = 0$ sur $\Gamma^* \cap W^*$. Alors, on voit que la fonction analytique $F = F^* \circ \pi$, est x_n-régulière et que l'on a $F = 0$ sur Γ.

Preuve de la proposition. Il suffit de considerer le cas $k = n - 1$. Par le lemme 1, il suffit de démontrer ceci pour un arc semi-analytique Γ, tel comme dans ce lemme. Soit $a \in \overline{\Gamma}$. On peut supposer que $a = 0$ et que 0 est une extremité de cet arc. Il y a une boule ouverte B de centre a tel que

$$\Gamma \cap B = \bigcup_{j=1}^{s} S_j$$

où $S_j = \{x \in B : h_j(x) = 0, f_{j1}(x) > 0, \ldots, f_{jt_j}(x) > 0\}$ avec h_j, f_{ji} analytiques dans un voisinage de $\overline{B}$. Fixons j. Évidement, il suffit de montrer que $\pi(S_j \cap U)$ est semi-analytique pour un voisinage $U \subset B$ de 0.

Si $0 \notin \overline{S_j}$ ou si 0 est un point isolé de S_j, l'assertion est trivial. Supposons donc que $0 \in \overline{S_j}$ et que 0 ne soit pas un point isolé de de S_j; alors il existe un voisinage $V \subset B$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\Gamma_j = S_j \cap V$ est un arc semi-analytique d'extremité 0.

Cas 1. On suppose que h_j est x_n-régulière. On peut admetre que tous les f_{ji} sont x_n-régulières, parce que chaque f_{ji} qui ne soit pas régulière peut être remplacé par $f_{ji} + h_j$ dans la description de S_j. Ensuite, par le théorème de preparation de Weierstrass, S_j est décrit par des polynômes distingués dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Selon le corollaire de **6**, il existe un voisinage ouvert $U \subset B$ de $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que S_j soit réunion fini des feuilles semi-analytiques, l'image de chacune par π étant semi-analytique. Ceci montre notre assertion.

Cas 2. On suppose que $h_j(0,\ldots,0,x_n) \equiv 0$ et que Γ_j est contenu dans l'axe des x_n. Alors $\pi(\Gamma_j) = 0$.

Cas 3. On suppose que $h_j(0,\ldots,0,x_n) \equiv 0$ et que Γ_j n'est pas contenu dans l'axe des x_n. D'après le lemme 2, il existe une fonction analytique H_j dans un voisinage Ω_j tel que H_j est x_n-régulière et $H_j = 0$ sur $\Gamma_j \cap \Omega_j$. Par conséquent on peut remplacer h_j par $h_j^2 + H_j^2$ dans la description de $\Gamma_j \cap \Omega_j$ et alors (après avoir diminuer B) on s'est ramené au cas 1.

8. LA SÉPARATION RÉGULIÈRE

8.1. Soit $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\pi((x_1,\ldots,x_n)) = (x_1,\ldots,x_k)$.

Lemme 1. *Soit Γ une feuille d'une stratification distinguée de dimension p et supposons que le rang de π_Γ soit constant et $< p$. On a alors, $\pi\left(\overline{\Gamma}\right) = \pi(E)$ avec un semi-analytique compact $E \subset \overline{\Gamma}$ de dimension $< p$.*

En effet, par le corollaire de **1**, il existe une application analytique $F : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ d'un voisinage U de $\overline{Q}$ tel que $T_x\Gamma = \operatorname{Ker} d_xF$ pour $x \in \Gamma$. Notons par $\Phi : U \ni x \longmapsto d_xF \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-p})$. Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et non constante sur une composante de la fibre de π_Γ.

Soit λ un fibre quelconque de π_Γ.

Supposons que λ soit compacte. Alors, $L_\lambda : \lambda \to \mathbb{R}$ atteint le maximum dans un point x_λ. Grâce au théorème du rang constant, l'espace

$$T_{x_\lambda}\lambda = \left(0 \times \mathbb{R}^{n-k}\right) \cap T_{x_\lambda}\Gamma = \operatorname{Ker}\left(\Phi(x_\lambda), \pi\right)$$

est de dimension $p - r$, donc $\operatorname{rang}(\Phi(x_\lambda), \pi) = n - p + r$, et on a de plus $x_\lambda \in A$ où

$$A = \{x \in \Gamma : \operatorname{Ker}(\Phi(x), \pi) \subset \operatorname{Ker} L\} = \\ \{x \in \Gamma : \operatorname{rang}(\Phi(x), \pi) \leqslant n - p + r\} = \Gamma \cap Z$$

où Z est le sous-ensemble analytique $\{x \in U : \operatorname{rang}(\Phi(x), \pi) \leqslant n - p + r\}$ de U. On a $A \subsetneq \Gamma$, parce que si non L serait constante sur chaque composante connexe de chaque fibre. Il s'ensuit que $\dim A < p$.

Dans le cas qui reste, λ n'est pas compacte et alors le bord $\partial\lambda$ est non vide et contenu dans $\partial\Gamma$.

Par conséquent on a $\pi(\partial\Gamma \cup A) = \pi\left(\overline{\Gamma}\right)$ et l'ensemble $\partial\Gamma \cup A \subset \overline{\Gamma}$ est semi-analytique de dimension $< p$ (voir **2**).

Lemme 2. *Pour une application linéaire quelconque* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, *l'ensemble*

$$\{\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) : \dim \psi(\operatorname{Ker} \varphi) \leqslant r\}$$

est toujours semi-algebrique.

Car en considerant la restriction $\psi|_{\operatorname{Ker}\varphi}$ on voit que

$$\dim \psi(\operatorname{Ker} \varphi) = \dim \operatorname{Ker} \varphi - \dim \operatorname{Ker} (\psi, \varphi)$$

d'où il résulte facilement la thése, vu que les ensembles des applications linéaires $\{\alpha : \dim \operatorname{Ker} \alpha = s\}$ sont toujours semi-algebriques.

Lemme 3. *Soit* Γ *une feuille d'une stratification distinguée. Alors l'ensemble* $\{x \in \Gamma : \operatorname{rang}_x \pi_\Gamma \leqslant r\}$ *est semi-analytique .*

Il suffit d'observer que l'ensemble en question est égal à

$$\{x \in \Gamma : \dim \pi(\operatorname{Ker} \Phi(x)) \leqslant r\} = \Gamma \cap \Phi^{-1}(\{\alpha : \dim \pi(\operatorname{Ker} \alpha) \leqslant r\})$$

où $\Phi : x \longmapsto d_x F$ avec une F selon le corollaire de **1** pour Γ.

Lemme 4. *Soit* Γ *une feuille de dimension* p *d'une stratification distinguée. On a alors*

$$\Gamma = Z \cup \bigcup_{i=1}^{s} \Gamma_i$$

où Z *est un semi-analytique de dimension* $< p$ *et les* Γ_i *sont des feuilles des stratifications distinguées, de dimension* p *et telles que* π_{Γ_i} *sont de rang constant.*

En effet, posons $r = \operatorname{rang} \pi_\Gamma$. D'après le lemme 3, l'ensemble $Z_0 = \{x \in \Gamma : \operatorname{rang}_x \pi_\Gamma < r\}$ est semi-analytique dans $\mathbb{R}^n$ et analytique rare dans Γ, donc de dimension $< p$. Il s'ensuit que $\Gamma_0 = \Gamma \setminus Z_0$ est une feuille semi-analytique de dimension p et telle que π_{Γ_0} est de rang constant r. Grâce au théorème des stratifications distinguées Γ_0 est une réunion finie des feuilles des stratifications distinguées: Γ'_j de dimension $< p$ et Γ_i de dimension p avec π_{γ_i} de rang contant r. Par conséquent l'ensemble

$$Z = Z_0 \cup \bigcup_j \Gamma'_j$$

avec les feuilles Γ_i , répondent à la question.

Proposition 1. *Soit* E *un semi-analytique compact de* $\mathbb{R}^n$. *On a alors* $\pi(E) = \pi(B)$ *avec un semi-analytique compact* $B \subset E$ *de dimension* $\leqslant k$.

On procède par récurrence sur $p = \dim E$. Supposons donc que l'on a $p > k$. Grâce au théorème des stratifications distinguées E est une réunion finie des feuilles Γ des stratifications distinguées. On peut donc admettre que $E = \overline{\Gamma}$ avec une telle feuille de dimension p.

Soit Z et Γ_i suivant le lemme 4. Alors $\operatorname{rang} \pi_\Gamma \leqslant k < p$, donc, d'après le lemme 1, on a $\pi(\overline{\Gamma_i}) = \pi(E)$ avec un semi-analytique compact $E_i \subset \overline{\Gamma_i}$ de dimension $< p$.

Par conséquent, $\pi(E) = \pi(Z \cup \bigcup_i E_i)$ ce qui termine la preuve, vu l'hypothèse de récurrence.

Supposons maintenant que $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $k = 2$).

Proposition 2. *Pour chaque semi-analytique compact E de $\mathbb{R}^n$, son image $\pi(E)$ est semi-analytique (compact).*

On peut admettre que $\dim E \leqslant 2$ vu la proposition 1. Par le théorème des stratifications distinguées, E est une réunion finie des feuilles Γ des stratifications distinguées de dimension $\leqslant 2$. On peut donc admettre que $E = \overline{\Gamma}$ avec une telle feuille Γ.

Grâce au lemme 4 et la proposition de **7.3**, il suffit de considerer le cas d'une feuille Γ de dimension 2 et telle que le rang de π_Γ soit constant et égal à r.

Si $r = 1$, on a $\pi(E) = \pi(E_1)$ avec un semi-analytique compact $E_1 \subset E$ de dimension $\leqslant 1$, vu le lemme 1. Alors, la proposition de **7.3** implique la thèse.

Dans le cas qui reste, $r = 2$, l'ensemble $F = \pi(\overline{F})$ est fermé, $G = \pi(\Gamma)$ est ouvert et $Z = \pi(\partial\Gamma)$ est semi-analytique (par la proposition de **7.3**). L'ensemble $G \setminus Z = F \setminus Z$ est ouvert-fermé dans le semi-analytique $\mathbb{R}^2 \setminus Z$, donc il est semi-analytique (voir **2**), d'où il résulte que $F = (F \setminus Z) \cup Z$ est semi-analytique

8.2. Rappelons d'abord que si $|a_i| \leqslant r^i$, $i = 1, \ldots, k$, alors on a $|\xi| \leqslant 2r$ pour toute racine ξ du polynôme $x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$.

Lemme 1. *Si $G(x, y)$ est une fonction analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, telle que $G(0, y) \not\equiv 0$, alors on a $\{G = 0\} \cap U \subset \{|y| \leqslant c|x|^\alpha\}$ avec un voisinage U de 0 et des c, $\alpha > 0$.*

En effet, vu le théorème de préparation, on peut admettre que $G(x, y) = y^k + a_1(x)y^{k-1} + \cdots + a_k(x)$ avac les a_i analytiques au voisinage de 0 et vérifiant $|a_i(x)| \leqslant \left(d|x|^{1/k}\right)^i$, $i = 1, \ldots, k$, avec un $d > 0$. On a alors $|y| \leqslant 2d|x|^{1/k}$ pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'un voisinage de 0, qui vérifie $G(x, y) = 0$.

Lemme 2. *Si $E \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$ est un semi-analytique compact de $\mathbb{R}^2$ tel que $E \cap (0 \times \mathbb{R}) \subset 0$ Alors on a $E \subset \{|y| \leqslant c|x|^\alpha\}$ avec certains $c, \alpha > 0$.*

En effet, il suffit de montrer que la frontière B de E est contenue dans un $\{|y| \leqslant c|x|^\alpha\}$. Or, on a $\dim B \leqslant 1$. Soit P un polynôme associé à une stratification distinguée d'un voisinage Q de $0 \in \mathbb{R}^2$ (dans un système des coordonées linéaires dans $\mathbb{R}^2$), compatible avec B. On a alors $B \cap Q \subset \{P = 0\}$ (vu (*c*) dans **1**). On a ensuite $P(x, y) = x^r G(x, y)$ dans Q avec un r et avec une G analytique vérifiant $G(0, y) \not\equiv 0$. Par conséquent, on a $B \cap Q \setminus 0 \subset \{G = 0\}$, d'où il résulte selon le lemme 1 que $B \cap U \subset \{|y| \leqslant c|x|^\alpha\}$ avec un voisinage U de 0 et des c, $\alpha > 0$.

Il en résulte la version suivante de la séparation régulière:

Théorème. *Soit A un sous-compact d'une variété analytique, et soient $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $\psi : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues aux graphes semi-analytiques. Si $\{\varphi = 0\} \subset \{\psi = 0\}$, alors $|\psi(x)| \leqslant c|\varphi(x)|^\alpha$ dans A avec certains c, $\alpha > 0$.*

En effet, il suffit d'observer que l'ensemble $\{(\varphi(x), \psi(x)) : x \in A\}$ est un compact sous-analytique de $\mathbb{R}^2$, donc semi-analytique selon la proposition 2 de **8.1**, vérifiant les hypothèses du lemme 2, et on a donc l'inégalité demandé.

8.3. Le théorème de **8.2** reste valable pour les fonctions continues aux graphe sous-analytique (voir [5], III.1) avec la même démonstration.

On observe, **en s'appuyant sur le théorème du complementaire de Gabrielov** (voir [3] et [5] III.4) que si F est un sous-analytique, le graphe de la fonction-distance $x \longmapsto \rho(x, F)$ est sous-analytique, car son graphe est égal à

$$\pi\left(\{(x,t,y) : y \in \overline{F}, |x-y| = t\}\right) \setminus \pi\left(\{(x,t,y) : y \in \overline{F}, |x-y| < t\}\right),$$

où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est la projection naturelle, et les ensembles projetés sont y-relativement compacts, (voir [5] III.1, prop. 1.2.2).

Si l'on prend $\varphi = f$ et $\psi : A \ni x \longmapsto \rho(x, Z)$ ou bien $\varphi : A \ni x \longmapsto \rho(x, B)$ et $\psi : A \ni x \longmapsto \rho(x, A \cap B)$ dans le théorème de **8.2**, il en résulte les deux théorèmes suivants.

Théorème 1. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction analytique avec $A \subset \mathbb{R}^n$ semi-analytique compact (c'est-à-dire, laquelle se prolonge sur un voisinage de A à une fonction analytique). On a alors:*

$$|f(x)| \geqslant C\rho(x, Z)^N \quad \textit{en } A$$

avec des constants $N > 0$ et $C > 0$, où $Z = \{x \in A : f(x) = 0\}$.

Théorème 2. *Chaque couple des semi-analytiques compacts $A, B \subset \mathbb{R}^n$ satisfait la condition de la séparation régulière :*

$$\rho(x, B) \geqslant d\rho(x, A \cap B)^N \quad \textit{en } A$$

avec des constants $N > 0$ et $d > 0$.

La version semi-analytique de ces théorèmes ne résulte pas directement du théorème de **8.2**, parce que la fonction - distance n'est que sous-analytique. Or, on en evite l'emploi du théorème de Gabrielov grâce au lemme suivant:

Lemme. *Soit A un compact semi-analytique de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in A$. Il existe une fonction semi-analytique*[7] *et continue $g : V \to \mathbb{R}$ d'un voisinage compact V de a dans $\mathbb{R}^n$, laquelle soit du même ordre que la fonction-distance $\rho(x, A)$ au voisinage de a, c'est-à-dire telle que*

$$c\rho(x, A) < g(x) < C\rho(x, A) \quad \textit{dans un voisinage de } a \textit{ dans } \mathbb{R}^n$$

avec des constantes $0 < c < C$.

En effet, le théorème 1 résulte immédiatement du théorème 2 (appliqué à la couple $A \times 0$, f_A). Ensuite, il est claire que pour avoir le théorème 2 il suffit de prouver l'inégalité de la séparation réguliére dans un voisinage de chaque point de $A \cap B$ (avec des constantes qui dépendent de ce point).

Preuve du lemme. Posons $M = \mathbb{R}^n$. L'ensemble suivant de $M^2 \times \mathbb{R}$

$$B = \{(x, u, t) : x + u \in A, \ |u| \leqslant t\}$$

est semi-analytique[8]. Grâce au théorème des stratifications distinguées de **2** avec la remarque 1 de **6**, il existe des applications linéaires $\phi : M \to M$

---

[7] C'est-à-dire, au graphe semi-analytique.

[8] Comme l'image de $\{y \in A, |y - x| \leqslant t\}$ par un automorphisme linéaire de $M^2 \times \mathbb{R}$.

et $\psi : M \to \mathbb{R}$, de normes arbitrairement petites , telles que l'image d'un voisinage arbitrairement petit W de $(a,0,0)$ dans B par l'application

$$\pi : M^2 \times \mathbb{R} \ni (x,u,t) \to (x - \phi(u), t - \psi(u)) \in M \times \mathbb{R}$$

est semi-analytique. Or, l'inverse $\chi : M \to M$ de l'application $M \ni u \to u + \phi(u) \in M$ est arbitrairement proche à l'identité de M , donc la fonction positivement homogène $\sigma(v) = |\chi(v)| - \psi(\chi(v))$ est de l'ordre de $|v|$ (même elle est arbitrairemant proche à $|v|$) et par suite la fonction

$$g(\xi) = \inf{}_{y \in A}\, \sigma(y - \xi),$$

continue dans M , est de l'ordre de $\rho(\xi, A)$. Pour chaque voisinage compact V de a dans A la fonction

$$g_V(\xi) = \inf{}_{y \in V}\, \sigma(y - \xi),$$

continue dans M , coïncide avec g dans un voisinage de a dans M .

Il suffit de prouver que le germe au point a d'un ensemble

$$G_r(V) \;=\; \{(\xi, \tau) \in M \times \mathbb{R}'' : g_V(\xi) \leqslant \tau \leqslant r\} \;,$$

oú $r > 0$ et V est un voisinage compact de a dans A , est semi-analytique[9], vu que le germe de g au point $(a,0)$ coïncide avec celui de $G_r(V) \backslash \operatorname{int} G_r(V)$.

Or, observons que les ensembles :

$$B_r(V) \;=\; \{(x,u,t) : x + u \in V,\ |u| \leqslant t \leqslant r\}$$

avec r, V comme auparavant, forment une base de voisinages de $(a,0,0)$ dans B . Il est simple à vérifier que l'on a :

$$\pi(B_r(V)) \;\subset\; G_{2r}(V) \quad \text{et} \quad G_r(V) \;\subset\; \pi(B_{2r}(V)) \qquad ^{10}$$

et, étant donnés r_0, V_0, r, V ,

$$B_{r_0}(V_0) \;\cap\; \pi^{-1}(\{|\xi - a| < \delta, |\tau| < \delta\}) \;\subset\; B_r(V) \;,$$

pourvu que δ soit suffisamment petit. La dernière inclusion implique que les germes de tous les ensembles $\pi(B_r(V))$ au point $(a,0)$ sont égaux entre eux, donc il sont égaux au celui de $\pi(W)$, voisinage suffisamment petit de $(a,0,0)$ dans B , et par conséquent ils sont semi-analytiques. Mais les deux inclusions précédentes montrent que ces germes sont égaux au celui de $G_r(V)$ (quelconque), ce qui termine la démonstration.

---

[9]C'est-à-dire, qu'il est égal au germe d'un semi-analytique, ou encore, qu'il existe un voisinage semi-analytique de a dans $G_r(V)$.

[10]Pour vérifier ces inclusions il suffit de prendre ψ avec $|\psi| \leqslant 1/3$ et d'observer que l'on a : $\pi(B_r(V)) = \{(\xi,\tau) : \xi + u + \phi(u) \in V,\ |u| \leqslant \tau + |\psi(u)| \leqslant r \ \text{ pour un } u\}$.

REFERENCES

[1] Bochnak,J., Coste,M., Roy, M.-F., Géométrie algébrique réelle, Springer (1987)

[2] Coste, M., Ensembles semi-algébriques, Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques, Springer Lecture Notes 959 (1982)

[3] Gabrielov, A.M., Projections des ensembles semi-analytiques (en russe), Funkc. Analiz i jego Priloz. 2 n.4(1969), pp. 18-30

[4] Łojasiewicz,S., Introduction to Complex Analytic Geometry, Birkhauser, (1991)

[5] Łojasiewicz, S. ,Zurro, M.-A., Una Introducción a la Geometría Semi- y Sub- Analítica, Universidad de Valladolid, (1993)

[6] Mostowski, T., Lipschitz equisingularity, Dissertationes Mathematicae CCXLIII (1985)